[http://student.gomel.by](http://student.gomel.by/) – заказать курсовую работу

### Многомерно-матричные полиномы

#### 2.1. Цель работы

1. Изучение полиномов многих переменных на основе системы Matlab.

#### 2.2. Теоретические положения

##### 2.2.1. Классические полиномы многих переменных

Рассмотрим классическую форму представления скалярного полинома  многих переменных , или, иначе, скалярного полинома  векторной переменной . Вектор  с целочисленными неотрицательными компонентами назовем мультииндексом и обозначим . Скалярная функция  переменных  вида

,  , (2.1)

называется одночленом  переменных степени . Скалярная функция вида

 (2.2)

называется однородным полиномом степени  векторной переменной . Скалярная функция вида



называется полиномом степени  векторной переменной . Таким образом, полином степени  векторной переменной  представляет собой сумму однородных полиномов (2.2) или сумму одночленов вида (2.1) со степенями от  до :

. (2.3)

Например, классическое представление скалярного полинома второй степени трех переменных  имеет вид



. (2.4)

Если ввести здесь однородные полиномы степеней , , 

,

,

,

то этот полином будет иметь вид

.

Важно знать, сколько одночленов содержит однородный полином степени   переменных (2.2) и полином  переменных степени  (2.3). Очевидно, что эти полиномы имеют столько же коэффициентов. Однородный полином степени   переменных (2.2) содержит



одночленов (коэффициентов). Полином  переменных степени  (2.3) содержит

.

одночленов (коэффициентов). Ясно, что

.

В частности, для полинома второй степени трех переменных (2.4) имеем

,

,

,

.

Для сравнения, число коэффициентов полинома 2-й степени четырех переменных будет равно

.

Неудобство работы с полиномами многих переменных в классической форме (2.3) состоит в плохой формализованности этого выражения. Плохая формализованность заключается в том, что порядковый номер коэффициента  в сумме (2.3) не совпадает с его «официальным номером» . Для преодоления этих трудностей необходимо иметь способ упорядочивания мультииндексных номеров  как для фиксированного числа , так и для всех . Наиболее часто применяется так называемое лексикографическое упорядочивание, определение которого также плохо формализовано. Из названия такого упорядочивания следует, что оно рассчитано на лексикографические способности человека и выполняется вручную. При отсутствии компьютерного алгоритма упорядочивания для однозначного определения полинома многих переменных (2.3) необходимо задавать не его коэффициенты , а таблицу соответствий порядковых номеров коэффициентов значениям коэффициентов и значениям их мультииндексов .

##### 2.2.2. Многомерно-матричные полиномы

Пусть  – -мерная матрица,

,

а  – -мерная матрица,

.

Однородный -мерно-матричный полином -й степени -мерно-матричной переменной  имеет следующее представление [1,2]:

, (2.5)

где  – -свернутая -я степень матрицы ,  – -мерная матрица коэффициентов. Мультииндекс  этой матрицы содержит  индексов. Мультииндекс  состоит из  мультииндексов, каждый из которых содержит  индексов. Матрица  должна быть симметричной при  относительно  своих последних мультииндексов.

Произвольный -мерно-матричный полином -й степени -мерно-матричной переменной  является суммой однородных полиномов (2.5):

, (2.6)

где по определению принято .

Если в (2.6) , то мы имеем известный скалярный полином скалярной переменной :

. (2.7)

При  получаем скалярный полином  векторной переменной :

, (2.8)

где  – -мерные симметричные при  матрицы -го порядка. В частности, при  имеем полином 1-й степени

, (2.9)

где  – скаляр, , , – одномерная матрица -го порядка. Скалярный полином второй степени векторной переменной имеет вид

,

где , , – двухмерная матрица -го порядка, , – те же, что и в (2.9).

При ,  имеем векторный полином  векторной переменной :

,

где  – -мерные симметричные при  относительно своих  последних индексов матрицы. В частности, при  получим векторный полином 1-й степени векторной переменной

,

где , , – одномерная матрица -го порядка, , , – двухмерная -матрица. Векторный полином 2-й степени векторной переменной имеет вид

,

где  и  те же, что и в (6), а  – трехмерная -матрица, симметричная относительно индексов .

##### 2.2.3. Схема Горнера для многомерно-матричного полинома

Для расчета скалярного полинома скалярной переменной (2.7) известна схема Горнера [3], при использовании которой уменьшается алгоритмическая сложность и повышается точность расчетов. В связи с этим представляется целесообразной разработка такой же схемы для скалярного полинома векторной переменной (2.8) или вообще для многомерно-матричного полинома (2.6). Получим схему Горнера сразу для многомерно-матричного полинома (2.6). Для этого запишем его в развернутой форме

 (2.10)

и представим в виде 

.

(2.11)

Раскроем скобки в (2.11). Для иллюстрации выполним это для отдельного слагаемого в (2.11)





. (2.12)

Учитывая симметричность матрицы  относительно последних мультииндексов, можно показать (см. приложение), что



,

и вместо (2.12) получим



.

Этот результат позволяет нам после раскрытия скобок в (2.11) приравнять коэффициенты полиномов (2.10) и (2.11). В итоге получим соотношения

,

,

………………………………

,

………………………………

.

Отсюда получаем алгоритм

,

, .

Если учесть, что в конце расчетов по данному алгоритму мы получаем коэффициент  и что , то становится ясно, что мы получили алгоритм расчета значения многомерно-матричного полинома (2.6) в точке . Ввиду произвольности  верхний индекс в обозначении этой точки можно опустить. В итоге получаем следующий алгоритм расчета значения полинома (2.6) в любой точке :

,

, , (2.13)

.

Это и есть схема Горнера для многомерно-матричного полинома (2.6).

Схема Горнера реализована в пакете программ «Анализ многомерных данных» для расчета значений скалярного полинома векторной переменной произвольной степени.

#### 2.3. Порядок выполнения работы

2.3.1. Запрограммировать расчет скалярного полинома () векторной переменной () по выражениям (2.3) и (2.8) в случае двух переменных (). Варианты заданий приведены в табл. 2.1. Вывести в одно графическое окно трехмерный и контурный графики полинома (2.3), а в другое – трехмерный и контурный графики полинома (2.8) (с помощью функции **meshc**).

*Указание.* Исходный полином задать в классическом представлении (2.3), выбрав коэффициенты  и степени  его переменных самостоятельно, а его многомерно-матричные коэффициенты в представлении (2.8) сформировать вручную путем сопоставления коэффициентов при одинаковых степенях переменных в классической и многомерно-матричной формах представления. Для такого сопоставления целесообразно записать эти две формы представления на бумаге. При правильном сопоставлении коэффициентов полинома двух форм представления (2.3) и (2.8) трехмерные графики в п. 2.3.1 должны совпадать. Для расчета значений полинома в многомерно-матричном представлении можно воспользоваться как непосредственно определением (2.8), так и схемой Горнера (2.13) (по выбору студента).

Таблица 2.1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № варианта | Степень полинома | № варианта | Степень полинома | № варианта | Степень полинома |
| 1. | 3 | 11. | 3 | 21. | 3 |
| 2. | 2 | 12. | 4 | 22. | 2 |
| 3. | 3 | 13. | 3 | 23. | 3 |
| 4. | 4 | 14. | 2 | 24. | 4 |
| 5. | 5 | 15. | 3 | 25. | 3 |
| 6. | 2 | 16. | 4 | 26. | 2 |
| 7. | 3 | 17. | 3 | 27. | 3 |
| 8. | 4 | 18. | 2 | 28. | 4 |
| 9. | 3 | 19. | 3 | 29. | 3 |
| 10. | 2 | 20. | 4 | 30. | 5 |